

Feladatot írta:
Pécsi István, Szolnok

Kódszám:.....

Lektorálta:
Balázs Barbara, Budapest

2018.04.07.

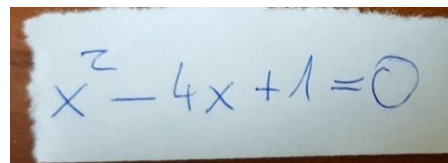
Curie Matematika Emlékverseny
10. évfolyam Országos döntő 2017/2018 Megoldás

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	Összesen
Elérhető	9 pont	10 pont	16 pont	12 pont	13 pont	60 pont

1. Van 8 darab teljesen egyforma fehér kártyánk. Közülük kettőre „1”-est, a többire pedig egy-egy „3”, „4”, „6”, „7”, „8” illetve „9” számjegyet írunk úgy, hogy a „6” és a „9” egymástól jól megkülönböztethető. Ezután a kártyákat írott felükkel lefelé fordítjuk, és a kapott „kártyapaklit” összekeverjük. Végül sorra kihúzzuk (egyesével) a 8 kártyát, és (számmal felfelé fordítva) egymás mellé rakjuk őket.
- a) Hányféle nyolcjegyű szám keletkezhet így?
- b) Hányféle olyan nyolcjegyű szám keletkezhet, amelyben az „1867” ebben a sorrendben szerepel, közvetlenül egymás után? (Egy ilyen nyolcjegyű szám például: 91318674.)
- (Maria Skłodowska-Curie Varsóban született 1867-ben, és 67. életévében, Passyban hunyt el 1934-ben.)

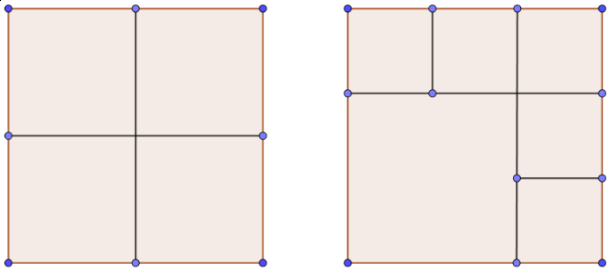
a) Ha a nyolc számjegy mind különböző lenne, akkor mivel a sorrend számít,	1 pont
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 =$	1 pont
40320 eset lenne.	1 pont
De van két egyforma „1” számjegyünk, emiatt az „1”-esek megkülönböztetése az esetek számát megduplázza, ezért ezt az eredményt osztani kell kettővel:	1 pont
20160 különböző nyolcjegyű szám képezhető.	1 pont
b) Tekintsük az „1867” jelsorozatot egyetlen objektumnak.	1 pont
Ekkor a maradék négy számjeggyel együtt 5 különböző jel összes lehetséges sorrendjeinek a számát keressük,	1 pont
ami $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$	1 pont
120.	1 pont
összesen 5+4=9 pont	

2. Zsombi éppen a másodfokú egyenletek megoldását tanulja. A házi feladatot az óra végén egy cetlire írta, de szerencsétlen módon elszakadt a cetli, és a megoldandó másodfokú egyenlet négyzetes tagjának „leszakadt” az együtthatója (mint a mellékelt fénykép is mutatja). Arra még emlékezett, hogy a „leszakadt” együttható 2-nél nagyobb egész szám volt, és még az is visszacsengett a fülébe, hogy Nóri, az osztály legjobb matekosa, aki rögtön meg is oldotta az egyenletet, mondta, hogy „két különböző megoldása van!” Adjuk meg a „leszakadt” együtthatót és az eredeti egyenlet két gyökét!



Ha a négyzetes tag együtthatóját a -val jelöljük, az egyenlet	1 pont
$ax^2 - 4x + 1 = 0$.	1 pont
Mivel az egyenletnek két különböző megoldása van, ezért a diszkriminánsa pozitív:	1 pont
$(-4)^2 - 4a > 0$,	2 pont
azaz $a < 4$.	1 pont
Mivel az a 2-nél nagyobb és egész is, ezért $a = 3$.	1 pont
Ebben az esetben az egyenlet két gyöke (megoldóképlet használata):	1 pont
$\frac{1}{3}$ és 1.	2 pont
összesen 10 pont	

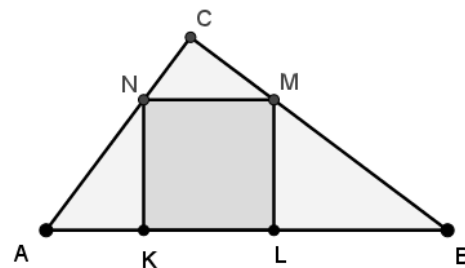
3. Rendelkezésünkre áll egy négyzet alakú papírlap és egy olló. Hogyan tudnánk a négyzetet szétadarolni a) 4; b) 6; c) 2016; d) 2018 darab négyzetre? Írja le az eljárást, és az első két esetben rajzolja le, hol kell vágni. (A szétadarabolás azt jelenti, hogy nincs hulladék, azaz a vágások során keletkezett darabok mindegyike négyzet kell, hogy legyen. A keletkező négyzeteknek nem kell egybevágóknak lenni.)

a) és b)		2 pont + 3 pont
c) Ha a „b)” megoldás bármely négyzetét az „a)” szerint tovább bontjuk, a tovább bontott négyzetből 4 új négyzet keletkezik,		1 pont
azaz a négyzetek száma 3-mal nő.		1 pont
Mivel $2016 - 6 = 2010$, ami 3-mal osztható, így		1 pont
a „b)” típusú felbontás tetszőleges négyzetein 670-szer alkalmazva az „a)” típusú felbontást,		1 pont
az eljárás végén éppen 2016 négyzetet kapunk.		1 pont
d) Mivel a „b)” típusú felbontás a négyzetek számát 5-tel növeli,		1 pont
ezért ebből kiindulva elérhető minden olyan 6-nál nagyobb szám, amely 5-tel osztva 1-et ad maradékul.		1 pont
Így eljuthatunk a 2006 darab négyzethez.		1 pont
Mivel az „a)” típusú felbontás a négyzetek számát 3-mal növeli,		1 pont
így ezt 4-szer elvégezve a négyzetek száma $4 \cdot 3 = 12$ -vel nő, azaz		1 pont
$2006 + 12 = 2018$ négyzet lesz az eljárás végén.		1 pont
összesen $2+3+5+6=16$ pont		

4. A korábban „rádium F”-nek is nevezett polóniumot Marie Skłodowska-Curie és férje, Pierre Curie fedezte fel 1898-ban. A polónium rendszáma 84. Állítsuk elő a 84-et n db egymást követő egész szám összegeként. Mekkora lehet n legnagyobb értéke?

Legyen a legelső (legkisebb) egész szám x , és tegyük fel, hogy n darab egymást követő szám összegeként állítsuk elő a 84-et. (x egész szám, n pozitív egész szám, az n lehető legnagyobb értékét keressük.)	1 pont
$x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + (n - 1)) = 84$, azaz	1 pont
$nx + (1 + 2 + \dots + (n - 1)) = 84$.	1 pont
A zárójelben: $1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{(n - 1)n}{2}$,	2 pont
ezért $nx + \frac{(n - 1)n}{2} = 84$,	
átrendezve $n^2 + (2x - 1)n - 168 = 0$.	2 pont
A Viète-formulák alapján $n_1 \cdot n_2 = -168$,	1 pont
és mivel n egész, ezért az n csak a 168 osztója lehet.	1 pont
A legnagyobb osztó a 168. Belátjuk, hogy a 84 előállítható 168 darab egymást követő egész szám összegeként:	1 pont
$(-83) + (-82) + \dots + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 84 = 84$.	2 pont
összesen 12 pont	

5. Rumcájsz feleségével, Mankával és kisfiával, Csibészkével új házba költözött. Jičín közelében, a Řáholec erdőben építették fel házukat. A háromszög alakú tisztáson (ABC háromszög) az ábrán látható módon építette fel a négyzet alapú házat (KLMN négyzet). Rumcájsz lelépte a háromszög oldalait: 185, 148 és 111 lépést mért. (Rumcájsz nagyon ügyesen, egyenlő hosszúakat lépett.) Közben arra is rájött, hogy az ABC háromszög derékszögű. Hány lépés hosszú Rumcájszék házának egy oldala (azaz hány lépés a KL szakasz hossza)?



Legyen a négyzet oldala x .	1 pont
Az AKN háromszög hasonló az ACB háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők,	2 pont
ezért $AK = \frac{111}{148}x = \frac{3}{4}x$.	2 pont
Az MLB háromszög is hasonló az ACB háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők,	2 pont
ezért $BL = \frac{148}{111}x = \frac{4}{3}x$.	2 pont
$AB = \frac{3}{4}x + x + \frac{4}{3}x$,	2 pont
azaz $\frac{37}{12}x = 185$,	1 pont
tehát $x = 60$ lépés hosszú Rumcájszék házának egy oldala.	1 pont
összesen 13 pont	