Feladatot írta:
Pécsi István, Szolnok

Lektorálta:
Csire Annamária, Debrecen

Kódszám:…………………

2018.04.07.

Curie Matematika Emlékverseny

9. évfolyam Országos döntő 2017/2018 Megoldás

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	Összesen
Elérhető	9 pont	14 pont	8 pont	14 pont	15 pont	60 pont

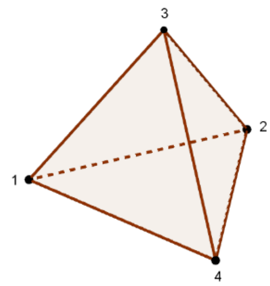
1. *Marika édesanyjának is és kishúgának is, aki 9 éves, éppen ma (2018. április 7-én) van a születésnapja. Marika észrevette, hogy ha édesanyja életkorát leírja (években mérve kétjegyű szám), akkor amennyiben a szám elé ír egy „4” számjegyet, 9-cel nagyobb számot kap, mintha a szám mögé írná a „4” számjegyet. Melyik évben született Marika édesanyja?*

Legyen Marika édesanyjának életkora évben mérve x.	**1 pont**
Ekkor ha a szám elé írja a „4”-t, a kapott szám 400+x.	**2 pont**
Ha a szám mögé írja a „4”-t, a kapott szám 10x+4.	**2 pont**
A feltételek alapján 400+x=10x+4+9.	**2 pont**
Innen x=43.	**1 pont**
2018-43=1975, Marika édesanyja 1975-ben született.	**1 pont**
	összesen 9 pont

2. *Egy osztályban az odajáró tanulók negyedének volt ötöse félévkor kémiából. Ha kettővel több ötös lett volna, akkor a nem ötösök száma kétszerese lett volna az ötösök számának.*
   a) Hány tanuló jár ebbe az osztályba?
   b) Mennyi a félévi kémia jegyek átlaga ebben az osztályban, ha a nem ötösök átlaga 3,5?
   (Félévkor mindenkit osztályoztak kémiából.)

a) Legyen az osztály tanulóinak száma x.	**1 pont**
Ekkor az ötösök száma x/4, a nem ötösök száma 3x/4.	**2 pont**
Ha kettővel több ötös lett volna, akkor az ötösök száma x/4+2, a nem ötösök száma 3x/4-2,	**2 pont**
így a feltétel alapján 3x/4-2=2(x/4+2).	**2 pont**
Az egyenlet megoldása: x=24, 24-en járnak ebbe az osztályba.	**1 pont**
b) Az ötösök száma 24/4=6, érdemjegyeik összege 6·5=30.	**2 pont**
A nem ötösök száma 18, érdemjegyeik összege 18·3,5=63.	**2 pont**
Így az osztályátlag (30+63)/24=3,875	**2 pont**
	összesen 8+6=14 pont

3. *Egy tetraéder minden csúcsát számozzuk be az 1, 2, 3, 4 számok valamelyikével úgy, hogy minden számot pontosan egyszer használjunk fel. (Egy ilyen számozást mutat az ábra.) Ezután írjuk rá mindegyik lapra azoknak a számoknak a szorzatát, amelyek az adott lap mint háromszög csúcsain találhatók. Mennyi a lapokra írt számok szorzata?*

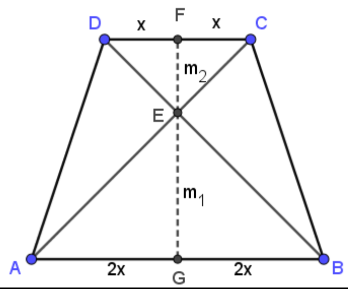


Minden csúcs három laphoz tartozik,	**2 pont**
ezért mindegyik szám háromszor szerepel szorzótényezőként.	**2 pont**
Ezért az eredmény $1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 4^3$=	**3 pont**
13824	**1 pont**
	összesen 8 pont

4. *Egy matematika tesztversenyen 20 kérdésre kell válaszolni. Minden helyes válaszért 4 pont jár. Ha rossz a válasz, 1 pontot levonnak, ha nincs válasz, nem is kap és nem is veszít pontot a versenyző.*
   a) Hány jó választ adhatott az, aki ezen a versenyen 55 pontot szerzett?
   b) Bizonyítsuk be, hogy ezen a versenyen nem lehet 69 pontot szerezni!

Legyen a jó válaszok száma x, a meg nem válaszolt kérdések száma y, a rossz válaszok száma z.	**1 pont**
Mivel $x+y+z=20$, ezért $z=20-x-y$.	**1 pont**
a) $4x+0\cdot y-(20-x-y)=55$, azaz átrendezve	**1 pont**
$5x+y=75$	**1 pont**
Ezért y-nak 5-tel oszthatónak kell lennie,	**1 pont**
és mivel minimum 0, maximum 20, elegendő megvizsgálni az $y=0,5,10,15,20$ esetet.	**1 pont**
Közülük az $y=0$ és az $y=5$ megoldás, mert ennél nagyobb y esetén a z negatív lenne.	**1 pont**
Így a jó válaszok száma 15 vagy 14 lehet.	**1 pont**
b) $4x+0\cdot y-(20-x-y)=69$, azaz átrendezve $5x+y=89$, fejezzük ki x-et:	**1 pont**
$x=\dfrac{89-y}{5}$	**1 pont**
Mivel $x+y+z=20$, ezért	**1 pont**
$z=20-\dfrac{89-y}{5}-y=\dfrac{11-4y}{5}$	**1 pont**
Mivel z nem lehet negatív, ezért y csak 0, 1 vagy 2 lehet.	**1 pont**
Egyik esetben sem ad egész számot a z, ezért nem lehet 69 pontot szerezni.	**1 pont**
	összesen 8+6=14 pont

5. *A király trapéz alakú díszkertjének AB alapja kétszer hosszabb, mint a CD alap. Ráadásul az AC és a BD átló merőleges egymásra és egyenlő hosszú. Legyen a két átló metszéspontja E. A király születésnapján a díszkert CDE háromszögét legkisebb fiára, a BCE és ADE részt a másik két fiára hagyta. (Az ABE rész a királyé maradt.) Így mind a négyükre (a királyra és a három fiúra) teljesül, hogy életkorukkal arányos a díszkert rájuk jutó részének a területe. Hány évesek a fiúk, ha a három fiú és a király életkorának összege 90 év? (Mindegyikük életkora egész szám.)*



Legyen AB felezőpontja G, CD felezőpontja F. Legyen FD hossza x.	**1 pont**
Ekkor FC is x,	**1 pont**
és mivel CDE egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért	**1 pont**
FE hossza is x.	**1 pont**
Így CDE területe $x\cdot 2x/2=x^2$.	**1 pont**
ABE is egyenlő szárú háromszög, ezért	**1 pont**
GE ossza $2x$,	**1 pont**
így ABE területe $2x\cdot 4x/2=4x^2$.	**1 pont**
Mivel FE $=x$ és DF$=x$, ezért DE $=x\sqrt{2}$.	**1 pont**
Hasonlóan AE $=2x\sqrt{2}$.	**1 pont**
Ezért az AED és a BEC háromszög területe egyaránt $x\sqrt{2}\cdot 2x\sqrt{2}/2=2x^2$.	**1 pont**
Ezért a területek aránya: $T_{CDE}:T_{ADE}:T_{BCE}:T_{ABE}=1:2:2:4$,	**1 pont**
így a 9 rész 90,	**1 pont**
1 rész 10,	**1 pont**
a fiúk életkora 10 év, 20 év, 20 év.	**1 pont**
	összesen 15 pont